

Г.Б. Филимонихин, доц., д-р. техн. наук, В.В. Пирогов, асп.,

И.И. Филимонихина, ассистент

Кировоградский национальный технический университет

Пространственная стабилизация положения оси вращения несущего тела маятниковыми демпферами

Рассмотрена задача пространственной стабилизации положения оси вращения несимметричного несущего тела маятниковыми демпферами. Найдены установившиеся движения системы, в которых ее кинетическая энергия принимает стационарные значения, а также установлен характер их устойчивости. **ось вращения, пространственная стабилизация, маятниковый демпфер**

Задача пространственной стабилизации оси вращения абсолютно твердого тела (АТТ) является актуальной задачей механики [1-11]. В работах [1-7] изучалась пространственная стабилизация положения оси вращения АТТ при помощи маятниковых и жидкостных демпферов. В работах было показано, что указанные демпферы эффективны для уменьшения достаточно больших начальных углов нутации главной центральной оси инерции АТТ, однако не было выявлено причины существования остаточных углов нутации этой оси. Более того, не была изучена сама принципиальная возможность с помощью маятниковых демпферов полностью устранять угол нутации. В связи с этим в настоящей работе исследуется задача пространственной стабилизации оси вращения АТТ маятниковыми демпферами, а именно – выделяются установившиеся движения системы; устанавливается характер их устойчивости; изучается возможность полной пространственной стабилизации положения оси вращения АТТ указанными демпферами.

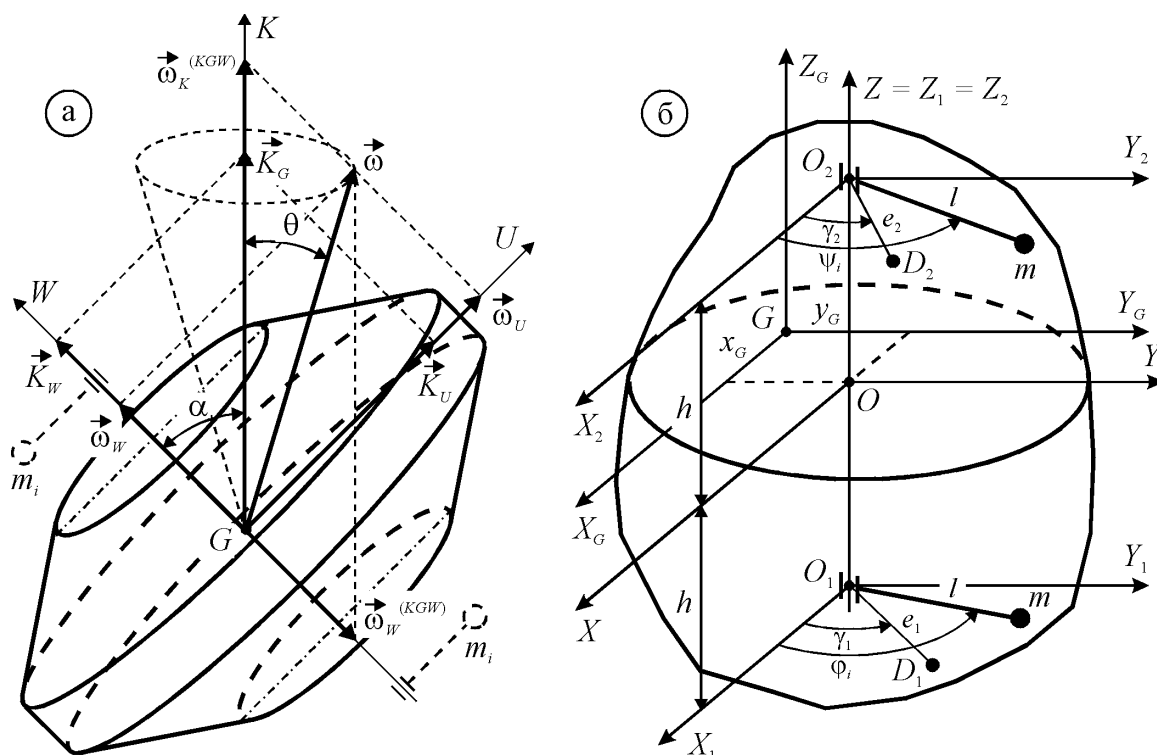
Для исследования количества и устойчивости установившихся движений применим энергетический критерий, сформулированный в работах [2,5]: в установившемся движении изолированная система, состоящая из несущего АТТ и демпфера, и не содержащая частей, способных накапливать потенциальную энергию, будет вращаться как жесткое целое вокруг неподвижной в пространстве оси, относительно которой у системы максимальный момент инерции, а кинетическая (полная) энергия системы при этом будет иметь минимальное значение. Критерий поясняет, почему демпферы применимы для стабилизации положения только той оси вращения АТТ, относительно которой АТТ имеет наибольший осевой момент инерции.

Для изучения принципа действия маятниковых демпферов, рассмотрим сначала случай вращения изолированного симметричного АТТ без демпфера – рис. 1, а. Не ограничивая общности можно считать, что АТТ вращается вокруг неподвижной в пространстве точки G – центра масс системы. Согласно закону сохранения момента количества движения системы вектор кинетического момента АТТ – \vec{K}_G неизменен. Направим вдоль него ось K . Ось W – главная центральная ось инерции АТТ, соответствующая наибольшему осевому моменту инерции C . В идеальном случае ось W должна совпадать с неподвижной осью K и АТТ должно вращаться вокруг этой оси. Из-за неточного придания начального вращения АТТ оси W и K не совпадают. Мгновенное вращательное движение АТТ вокруг центра масс характеризует вектор мгновенной угловой скорости $\vec{\omega}$. Можно показать, что из-за симметрии АТТ векторы $\vec{\omega}, \vec{K}_G$ и ось W лежат в одной плоскости, а любая центральная ось U , лежащая в этой

плоскости и перпендикулярная оси W , так же главная и соответствует меньшему главному осевому моменту инерции A . В работе [2,5] получены формулы, связывающие угол нутации α и угол θ между векторами кинетического момента и угловой скорости с кинетической энергией системы T :

$$\frac{K_G^2}{2} \left(\frac{\cos^2 \alpha}{C} + \frac{\sin^2 \alpha}{A} \right) = T, \quad \cos \theta = 2T / K_G \omega. \quad (1)$$

Поскольку АТТ – изолированное, то имеет место закон сохранения полной (кинетической) энергии системы: $T = T_0$. Таким образом, АТТ будет совершать мгновенное вращательное движение вокруг оси, направленной по вектору угловой скорости $\vec{\omega}$, а сама ось вращения будет совершать коническую прецессию относительно оси K . Поэтому при отсутствии рассеяния энергии картина движения АТТ будет неизменна.



а – принцип действия маятниковых демпферов; б – модель системы АТТ – маятниковый демпфер

Рисунок 1 – Схемы АТТ с маятниковыми демпферами

Добавим теперь в систему маятники (на рис. 1, а – насажены на ось W и показаны пунктиром). Разложим $\vec{\omega}$ на составляющие, направленные по осям K и W аффинной системы координат KGW : $\vec{\omega}_K^{(KGW)}, \vec{\omega}_W^{(KGW)}$. Тогда под действием центробежных сил, возникающих из-за составляющей $\vec{\omega}_K^{(KGW)}$, маятники будут стремиться максимально отклониться от оси K . АТТ, при этом, будет вращаться относительно маятников вокруг оси W с относительной угловой скоростью $\vec{\omega}_W^{(KGW)}$. Благодаря вязкому трению, кинетическая энергия системы будет уменьшаться: $dT/dt < 0$. Как видно из (1), при этом будет уменьшаться угол нутации α . Если влиянием маятников пренебречь, то в соответствии с энергетическим критерием, со временем АТТ будет вращаться вокруг оси W , которая совпадет с осью K .

Наличие маятников может помешать полному устранению угла нутации. Для изучения этого явления будем рассматривать демпфер, состоящий из двух пар

маятников, насаженных на ось W в разных поперечных плоскостях (рис. 1, б). Из теории пассивных автобалансиоров известно [12], что такое устройство теоретически может полностью уравновесить несимметричный спутник и тем самым полностью устранить угол нутации.

Пусть АТТ имеет массу M . Массо-инерционные характеристики АТТ (и всей системы) будем описывать с помощью главных центральных осей инерции АТТ – $OXYZ$, которые жестко с ним связаны и выходят с центра масс АТТ – точки O . Главные осевые моменты инерции АТТ, относительно осей X, Y, Z соответственно равны A, B, C . В общем случае $A \neq B \neq C$.

Произвольная неуровновешенность АТТ относительно оси Z , статическая или динамическая, создается двумя материальными точками D_1 и D_2 , соответственно массами μ_1, μ_2 ($\mu_1 = \mu_2$), расположенными в плоскостях $X_1O_1Y_1$ и $X_2O_2Y_2$. Последние находятся на расстоянии h по разные стороны от плоскости XOY . Положение i -ой массы задается эксцентриситетом e_i и углом γ_i / $i=1,2$ / .

В плоскостях $X_1O_1Y_1$ и $X_2O_2Y_2$ на ось Z насажены по два математических маятника, создающих демпферы. Положение маятников в плоскости $X_1O_1Y_1$ определяется углами φ_1, φ_2 , в плоскости $X_2O_2Y_2$ – углами ψ_1, ψ_2 . Относительному движению маятников препятствуют силы вязкого сопротивления. Маятники одинаковые, имеют массу m , длину l и осевой момент инерции ml^2 относительно оси, на которую насажены. Как видно из рис. 1, б радиус-векторы точечных масс \vec{r}_{μ_i} , создающих неуровновешенность, а также радиус-векторы масс маятников $\vec{r}_{\varphi_i}, \vec{r}_{\psi_i}$ / $i=1,2$ / , имеют такие проекции на оси X, Y, Z :

$$\begin{aligned} \vec{r}_{\mu_1} (e_1 \cos \gamma_1, e_1 \sin \gamma_1, -h), \quad \vec{r}_{\mu_2} (e_2 \cos \gamma_2, e_2 \sin \gamma_2, h); \\ \vec{r}_{\varphi_i} (l \cos \varphi_i, l \sin \varphi_i, -h), \quad \vec{r}_{\psi_i} (l \cos \psi_i, l \sin \psi_i, h), \quad / i=1,2 / . \end{aligned} \quad (2)$$

Учитывая (2), находим осевые и центробежные моменты инерции материальных точек D_1 и D_2 (с индексом μ) и маятников (с индексом m) относительно осей $OXYZ$:

$$\begin{aligned} J_x^{(\mu)} = 2\mu h^2 + \mu(e_1^2 \sin^2 \gamma_1 + e_2^2 \sin^2 \gamma_2); \quad J_y^{(\mu)} = 2\mu h^2 + \mu(e_1^2 \cos^2 \gamma_1 + e_2^2 \cos^2 \gamma_2); \\ J_z^{(\mu)} = \mu(e_1^2 + e_2^2); \quad J_{xy}^{(\mu)} = J_{yx}^{(\mu)} = \mu(e_1^2 \cos \gamma_1 \sin \gamma_1 + e_2^2 \cos \gamma_2 \sin \gamma_2); \\ J_{xz}^{(\mu)} = J_{zx}^{(\mu)} = \mu h(-e_1 \cos \gamma_1 + e_2 \cos \gamma_2); \quad J_{yz}^{(\mu)} = J_{zy}^{(\mu)} = \mu h(-e_1 \sin \gamma_1 + e_2 \sin \gamma_2); \\ J_x^{(m)} = 4mh^2 + ml^2(\sin^2 \varphi_1 + \sin^2 \varphi_2 + \sin^2 \psi_1 + \sin^2 \psi_2); \\ J_y^{(m)} = 4mh^2 + ml^2(\cos^2 \varphi_1 + \cos^2 \varphi_2 + \cos^2 \psi_1 + \cos^2 \psi_2); \quad J_z^{(m)} = 4ml^2; \\ J_{xy}^{(m)} = J_{yx}^{(m)} = ml^2(\cos \varphi_1 \sin \varphi_1 + \cos \varphi_2 \sin \varphi_2 + \cos \psi_1 \sin \psi_1 + \cos \psi_2 \sin \psi_2); \\ J_{xz}^{(m)} = J_{zx}^{(m)} = mlh(-\cos \varphi_1 - \cos \varphi_2 + \cos \psi_1 + \cos \psi_2); \\ J_{yz}^{(m)} = J_{zy}^{(m)} = mlh(-\sin \varphi_1 - \sin \varphi_2 + \sin \psi_1 + \sin \psi_2). \end{aligned} \quad (3)$$

Тензор инерции системы относительно осей $OXYZ$ имеет следующий вид:

$$J \approx \begin{bmatrix} A + J_x^{(\mu)} + J_x^{(m)} & -J_{xy}^{(\mu)} - J_{xy}^{(m)} & -J_{xz}^{(\mu)} - J_{xz}^{(m)} \\ -J_{xy}^{(\mu)} - J_{xy}^{(m)} & B + J_y^{(\mu)} + J_y^{(m)} & -J_{yz}^{(\mu)} - J_{yz}^{(m)} \\ -J_{xz}^{(\mu)} - J_{xz}^{(m)} & -J_{yz}^{(\mu)} - J_{yz}^{(m)} & C + J_z^{(\mu)} + J_z^{(m)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{J}_x & -\tilde{J}_{xy} & -\tilde{J}_{xz} \\ -\tilde{J}_{xy} & \tilde{J}_y & -\tilde{J}_{yz} \\ -\tilde{J}_{xz} & -\tilde{J}_{yz} & \tilde{J}_z \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Для описания движения системы будем использовать инерциальную систему координат (абсолютно неподвижную или опорную) $G\Xi HZ$ и подвижную систему координат $GX_GY_GZ_G$, оси которой параллельны осям $OXYZ$. Так как точка G – центр масс системы, то оси $GX_GY_GZ_G$ – центральные. Движение системы сложное. Переносным движением считаем вращательное движение системы как целого вокруг

точки G . Его можно задать тремя углами Эйлера. За относительное движение примем движение маятников относительно АТТ. Движение маятников в плоскости $X_1O_1Y_1$ определяется углами φ_1, φ_2 , в плоскости $X_2O_2Y_2$ – углами ψ_1, ψ_2 (рис. 1, б). Материальные точки D_1 и D_2 неподвижны относительно АТТ. С учетом вышеизложенного, движение системы будем определять с помощью семи обобщенных координат. Заметим, что во время движения системы, в общем случае, оси $OXYZ$ не совпадают с осями $GX_GY_GZ_G$.

В соответствии с теорией автобалансиров [12] у системы существуют основные движения, в которых неуравновешенность АТТ устранена маятниками, ось вращения АТТ стабилизирована и система вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси $Z = K$. Так же существуют побочные движения, в которых динамическая неуравновешенность не устранена, и ось Z не совпадает с осью K .

Положение осей $OXYZ$ определяем относительно осей $GX_GY_GZ_G$ координатами x_G, y_G, z_G (рис. 1, б). Отметим, что $z_G = 0$, так как центр масс АТТ, маятников и материальных точек D_1 и D_2 находится в плоскости XOY . Тогда координаты центра масс системы относительно осей $OXYZ$ имеют вид:

$$\begin{aligned} x_G &= [\mu(e_1 \cos \gamma_1 + e_2 \cos \gamma_2) + ml(\cos \varphi_1 + \cos \varphi_2 + \cos \psi_1 + \cos \psi_2)] / M_\Sigma, \\ y_G &= [\mu(e_1 \sin \gamma_1 + e_2 \sin \gamma_2) + ml(\sin \varphi_1 + \sin \varphi_2 + \sin \psi_1 + \sin \psi_2)] / M_\Sigma, \quad z_G = 0, \end{aligned} \quad (5)$$

где $M_\Sigma = M + 2\mu + 4m$ – суммарная масса системы.

Тензор инерции системы относительно осей $GX_GY_GZ_G$ будет определяться такими осевыми и центробежными моментами инерции:

$$\begin{aligned} J_{x_G} &= \tilde{J}_x - M_\Sigma y_G^2; \quad J_{y_G} = \tilde{J}_y - M_\Sigma x_G^2; \quad J_{z_G} = \tilde{J}_z - M_\Sigma (x_G^2 + y_G^2); \\ J_{x_G y_G} &= \tilde{J}_{xy} - M_\Sigma x_G y_G; \quad J_{x_G z_G} = \tilde{J}_{xz}; \quad J_{y_G z_G} = \tilde{J}_{yz}. \end{aligned} \quad (6)$$

Тензор инерции системы, относительно ее центральных осей, является функцией углов поворотов маятников: $J_G = J_G(\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2)$. Поэтому и кинетическая энергия в установившемся движении выражается как функция углов поворотов маятников:

$$T_{уст}(\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2) = J_K(\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2) \omega^2 / 2 = K_G^2 / 2 J_K(\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2). \quad (7)$$

где $J_K(\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2)$ – осевой момент инерции системы в установившемся движении относительно оси K ;

ω – угловая скорость вращения системы в установившемся движении вокруг этой оси.

Из (7) видно, что J_K и $T_{уст}$ одновременно принимают экстремальное значение. Поэтому вместо $T_{уст}$ можно исследовать на экстремум $J_K(\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2)$. Тогда

$$\partial J_K(\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2) / \partial \varphi_i = 0, \quad \partial J_K(\varphi_1, \varphi_2, \psi_1, \psi_2) / \partial \psi_i = 0, \quad / i = 1, 2 / \quad (8)$$

– система алгебраических уравнений для поиска установившихся движений. На основании формулы (8) и энергетического критерия можно сделать следующий вывод:

1) на установившихся движениях, в которых система вращается как жесткое целое вокруг неподвижной в пространстве оси K , осевой момент инерции системы J_K принимает по $\varphi_i, \psi_i, / i = 1, 2 /$ экстремальное или критическое значение;

2) среди всех установившихся движений устойчивыми могут быть только те, на которых осевой момент инерции J_K принимает максимальное значение.

Для выделения установившихся движений нужно найти такие углы φ_i, ψ_i , $i=1,2$, при которых, у одного главного осевого момента инерции системы частные производные по φ_i, ψ_i равны нулю. Для решения этой задачи будем использовать метод полного перебора. Сущность указанного метода заключается в переборе с некоторым шагом всех значений углов поворотов маятников, для поиска всех возможных установившихся движений.

Для тестовых расчетов были взяты следующие параметры системы: АТТ - полый цилиндр, масса которого $M=100$ кг распределена по боковой поверхности радиуса $R=2$ м. Другие параметры имеют такие значения: $m=15$ кг; $\mu=15$ кг; $h=0,1$ м; $l=1,8$ м; $e_1=e_2=1,8$ м; при динамической неуравновешенности $\gamma_1=0$ и $\gamma_2=\pi$; при статической неуравновешенности $\gamma_1=0$ и $\gamma_2=0$. Осевые моменты инерции АТТ вычислялись по формулам $J_x = J_y = 0,5M[(H^2/6)+R^2]$, $J_z = MR^2$ при высоте цилиндра $H=1$ м: $A=B=208,3$ кг·м², $C=400$ кг·м².

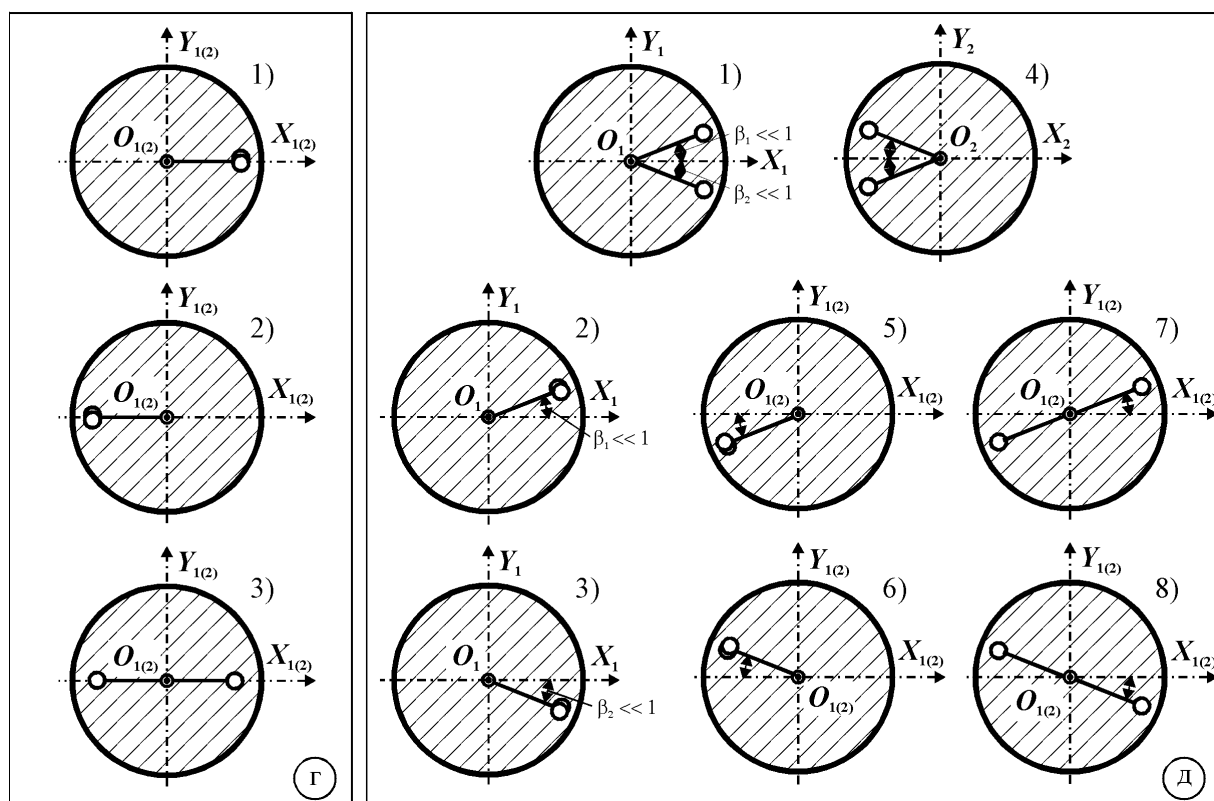
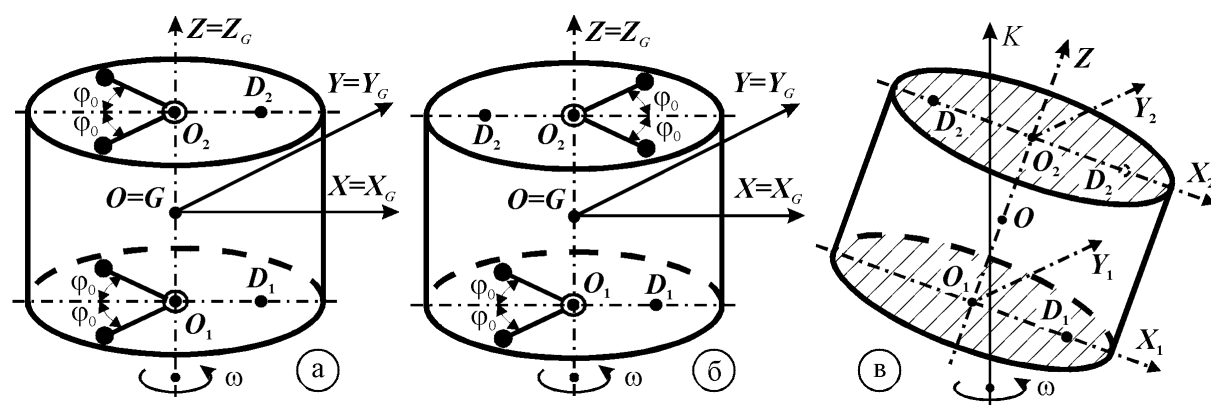
В результате проведенных расчетов были получены следующие установившиеся движения для случаев статической и моментной неуравновешенности.

1) Основные движения, изображены на рис. 2, а, б.

2) Побочные движения, изображены на рис. 2, в-д. Делятся на две группы.

а) 1-ая группа образуется следующим образом (рис. 2, г). В нижней плоскости существуют три существенно различные равновесные положения маятников $k_1, k_2 = 0$; $k_1, k_2 = 1$; $k_1 = 0, k_2 = 1$, где k_j - числа, задающие направление отклонения маятников: если $k_j = 0$, то маятник j отклонен по оси X_1 , если $k_j = 1$ - в противоположную сторону. Аналогичные положения для другой пары маятников существуют в другой плоскости: $k_3, k_4 = 0$; $k_3, k_4 = 1$; $k_3 = 0, k_4 = 1$. Комбинацией указанных положений, получаются девять существенно различных установившихся движений.

б) В движениях 2-ой группы $\varphi_i = \beta_i + k_i\pi$, где $\beta_i \neq 0, |\beta_i| < \pi$. В случае динамической неуравновешенности в нижней плоскости цилиндра маятники располагаются в положениях 1–3, 5, 6, изображенных на рис. 2, д, а в верхней плоскости – в положениях 4–6, 7, 8. В случае статической неуравновешенности, как в верхней так и в нижней плоскости, маятники располагаются в положениях 1-3, 5-8 (рис. 2, д). Следует отметить, что эти положения не могут комбинироваться произвольным образом. Так, маятники в верхней и нижней плоскости могут быть повернуты вокруг оси Z на одинаковый угол β_i в одну сторону.



а – основное движение (статическая неуравновешенность); б – основное движение (динамическая неуравновешенность); в – побочное движение; г – положения маятников в побочных движениях 1-ой группы; д - положения маятников в побочных движениях 2-ой группы

Рисунок 2 – Установившиеся движения системы

Наибольший главный осевой момент инерции системы был исследован на экстремум на всех установившихся движениях. В результате было установлено, что как при динамической, так и при статической неуравновешенности кинетическая энергия системы принимает минимальное значение на некоторых побочных движениях из 2-ой группы, что указывает на их устойчивость. На остальных движениях, кинетическая энергия системы не принимает минимального значения, что указывает на их неустойчивость.

Проведенные исследования позволяют сделать такие выводы:

- основные движения неустойчивы, так как на них кинетическая энергия системы не принимает минимального значения;

- существуют побочные движения, в которых кинетическая энергия системы принимает минимальное значение и поэтому они устойчивы;
- маятниковые демпферы полностью не устраняют угол нутации АТТ, так как сами вносят в систему неуровновешенность.

Список литературы

1. Bainum P.M., Fuechsel P.G., Mackison D.L. Motion and stability of a dual-spin satellite with nutation damping, *Journal of Spacecraft and Rockets*, 7, № 6, 690-696 (June 1970).
2. Likins P.W. Effects of energy dissipation on the free body motions of spacecraft /Technical Report No. 32.860, NASA, California Institute of Technology Pasadena, California, 1966, p. 70.
3. Алпер Дж. Р. Теория маятникового демпфера нутационных колебаний спутника. - *Ракетная техника и космонавтика*, 1965, № 3, с. 170 - 176.
4. Гробов В.А. К теории вращательных движений свободного твердого тела, несущего маятники, *Укр. матем. журнал*, 21, № 6, 818—823 (1969).
5. Гордон С., Томсон У. Вращательное движение пассивных космических аппаратов. – В кн.: *Проблемы ориентации искусственных спутников Земли*. М.: Наука, 1966. с. 452.
6. Мирер С.А., Сарычев В.А. Оптимальные параметры спутника, стабилизируемого вращением, с демпфером маятникового типа // *Космические исследования*. – 1997. – т.35. №6. – С. 651-658.
7. Ильин А.А., Овчинников М.Ю., Пеньков В.И. Обеспечение ориентации малого спутника, стабилизируемого собственным вращением. – М.: ИПМ, 2004. – 28 с.: ил.; 6 см. – (Препринт / Ин-т прикл. математики им. М.В. Келдыша АН СССР; № 83). Библиогр.: с. 27. 15 назв.
8. Філімоніхін Г.Б. Стабілізація маятниками положення осі обертання ізольованого абсолютно твердого тіла // *Вісник, математика-механіка. Київський національний університет*. Вип. №7-8, 2002. С.67-71.
9. Горошко О.О., Філімоніхін Г.Б., Пирогов В.В. Стабілізація положення осі обертання абсолютно твердого тіла маятниковим (кульовим) автобалансиром / *Вісник Київського університету*. Серія: фіз.-мат. н., вип. № 3, 2004, С.95-102.
10. Горошко О.О., Філімоніхін Г.Б., Пирогов В.В., Філімоніхіна І.І. Стабілізація положення осі обертання абсолютно твердого тіла багатомаятниковим (багатокульовим) автобалансиром // *Вісник Київського ун-ту*. Серія: фізико-матем. науки. 2005. - №4. - С. 67-76.
11. Филимоныхин Г.Б., Пирогов В.В. Стабилизация положения оси вращения твердого тела связанными абсолютно твердыми телами. // *Прикладная механика*. – 2005. – 41, №8. – с. 122 – 129.
12. Філімоніхін Г.Б. Зрівноваження і віброзахист роторів автобалансирами з твердими коригувальними вантажами: монографія (за спеціальністю 05.02.09 - динаміка та міцність машин). - Кіровоград: КНТУ, 2004. - 352 с.

Розглянута задача просторової стабілізації положення осі обертання несиметричного тіла-носія маятниковими демпферами. Знайдені усталені рухи системи, в яких її кінетична енергія приймає стаціонарні значення, а також встановлений характер їх стійкості.

S U M M A R Y . Is considered the problem of stabilization, of the position of the axis of the rotation of the asymmetrical body by pendulums dampers concerning itself. The set motions are found systems in which its kinetic energy takes on stationary values, and also character of their stability is set.